Critical behavior of the matrix models generating 3D random volumes(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Umeda, Naoya

（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	梅田直弥
論文題目	3次元ランダム体積を生成する行列模型の臨界挙動について		

（論文内容の要旨）

弦理論は量子重力を含む統一理論の有力候補である。弦の力学は２次元重力に物質場を結合させたもので記述できるが、弦理論の非摂動的な定義は未だなされていない。重力部分の正則化の手法の１つに、ランダム単体分割と呼ばれる方法がある。この方法では、弦の世界面を三角形分割で離散化することで重力を正則化する。正則化した分配関数は三角形分割の和として表せ、これは行列模型で実現できることが知られている。しかし、この模型では結合させられる物質場の数に上限（ｃ＝１の壁）が存在し、臨界次元の弦の力学を記述することができなかった。

弦の代わりに空間２次元に拡がった膜を考えることで、より高い次元の量子重力を記述することができる可能性がある。弦の場合には世界面の計量の自由度（＝３）と一般座標不変性の次元（＝２）との差から空間１次元分が創発し、物質場と合わせて２次元の背景時空を実現できたが、膜の場合に同様の勘定を行うと、空間３（＝６－３）次元分が創発すると考えられる。膜の力学は３次元の重力に物質場が結合したもので表せ、これは３次元のランダム体積を生成する模型で記述することができる。従来、これはテンソル模型で実現できることが知られていたが、この模型の力学変数は３階のテンソルであり、行列模型と比べて解析的な扱いが難しく、連続極限などを調べることが難しかった。

本論文では、３次元のランダム体積を生成する新たな行列模型（三角形―ヒンジ模型）が構築されている。この模型では、３次元体積の構成要素を四面体ではなく、三角形と蝶番（ヒンジ）に分解することで、力学変数を行列に取ることができる。この模型は半単純な結合的代数によって特徴付けられるものであり、その代数的性質から解析的な扱いが比較的容易であると期待できる。生成される配位は必ずしも四面体分割とは限らないが、模型に存在するパラメータの極限をとることで、生成される配位を３次元多様体の四面体分割に制限することができる。さらに、本論文では生成される３次元体積に物質場を乗せる方法が開発されている。また、生成される配位が向き付け可能であることを示し、四面体の張り合わせの向きについてゲージ化した模型も考えられている。また、この模型の分配関数は一般に発散してしまうが、積分路を適当に取り直すことで、摂動論を変えずに自由エネルギーを有限にすることが出来ることが示されている。これにより、模型の臨界点を数値的に調べることが出来るが、配位を四面体分割に制限すると作用が複素数値をとるため、符号問題の解決が不可欠になる。

符号問題を解決する方法の１つに、Lefschetz thimble法と呼ばれるものがある。この方法は、積分路をgradient flowを用いて変形することで作用の振動を抑える方法であり、幅広い模型に対して適用可能であることが特長である。しかし、flow timeを大きくとりすぎると有効作用に指数関数的に大きなポテンシャル障壁が現れ、モンテカルロ法を用いた計算ではこれが原因で正しい結果を得るために非常に大きな時間がかかるという問題があった。本論文ではflow time自身をtempering parameterとするparallel tempering法を導入することでこの問題を解決している。この方法では、大きなflow timeにおける高いポテンシャル障壁はより小さなflow timeの配位を通して迂回でき、これによって極めて一般の模型について符号問題を解決できる。本論文ではこの方法を用いて三角形―ヒンジ模型の数値解析を試みているが、先述の方

（続紙　２　）

法はうまく機能したものの、相構造について正確な主張を行うためにはアルゴリズムの計算コストを下げる必要があるという結論に至っている。

アルゴリズムの計算コストを下げるためには、tempering parameterの最適化が重要である。本論文ではこの最適化の第一歩として、詳細釣り合い条件を満たすアルゴリズムに対して、配位空間に距離を導入している。この距離は２つの配位の間の遷移の難しさを定量化するものになっており、また極めて多数の縮退した真空を持つ模型に対してsimulated tempering法を導入した場合を考えると、配位空間に自然にanti-de Sitter-likeな幾何が創発することが言及されている。この距離を用いることで、上述のtempering parameterの最適化を幾何学的に行えると期待できる。

（論文審査の結果の要旨）

３次元のランダム体積を生成する模型としては従来テンソル模型が知られていたが、これは解析的な扱いが難しく、連続極限についてもよく分かっていなかった。また、この模型が生成する配位は四面体分割であるが、一般の四面体分割は必ずしも３次元多様体と対応しないことが知られており、そのような配位を取り除くことが課題であった。近年、colorの自由度を考えることで配位を３次元球に制限できることが提唱されていたが、この方法は３次元球の配位を全て取り出すことが出来なかった。一方、本論文で構築した模型では、生成される配位を３次元多様体の四面体分割のみに制限できるが、この制限は３次元多様体の四面体分割全てを取り出すことができる。さらに、この模型は非摂動的に定義することができ、物質場を乗せる方法も開発されているため、膜の力学を記述する模型としては将来性の高い模型であると言える。

また、本論文では符号問題についても言及されている。符号問題の解決方法としては従来、複素Langevin法とLefschetz thimble法が知られていたが、前者はwrong convergence problemと呼ばれる問題があり、幅広いクラスの模型に対して間違った結果を与えてしまう。一方、Lefschetz thimble法ではそういった問題は生じないが、ポテンシャル障壁に付随するmultimodal problemと呼ばれる問題があった。本論文ではこのmultimodal problemについて、parallel tempering法の導入により解決できることが提唱されている。この方法を用いることで、Lefschetz thimble法は極めて一般の模型について符号問題を解決できるようになるため、本論文で提唱されている方法は符号問題の解決における重要な役割を果たすと考えられる。

また、本論文では計算コストを下げる方法の第一歩として、配位空間に距離を導入している。従来、モンテカルロ法の計算コストを評価する指標としては確率分布間の距離や演算子のautocorrelationなどが知られていたが、配位間の遷移の難しさを直接定量化する指標は知られておらず、また配位間の遷移の難しさを幾何学的に捉える手法は新しいものである。本論文では縮退した真空を持つ模型についてanti-de Sitter-likeな幾何が創発することが言及されており、この距離は配位空間の幾何について新たな知見を与えるものであると言える。この距離を用いることで、アルゴリズムの最適化を幾何学的な観点から行えると期待できる。

以上の成果より、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成28年1月18日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　　　　年　　　月　　　日以降